

Chapitre 2 | Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

8

Dans cette partie, on va apprendre

- (i) à exprimer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- (ii) la notion de famille libre et liée;
- (iii) la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- (iv) la notion du produit entre matrice $n \times n$ et vecteur de $\mathbb{R}^n$;
- (v) la forme vectorielle d'un SEL.

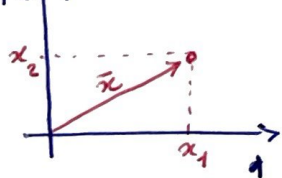
§2.1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Déf (p.19) | Vecteur = vecteur colonne est un uplet $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que l'on va représenter sous forme de colonne

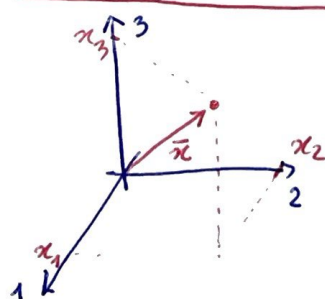
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

← dans les notes de Sacha et dans les séries on écrit **x** (en gras), mais pour simplifier la vie ici on écrit $\vec{x}$.

Graphiquement



pour $\mathbb{R}^2$



Égalité | Pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
 $\vec{x} = \vec{y}$ ssi $x_i = y_i$
 $\forall i \in [1, n]$

Opérations avec vecteurs

Pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose
(vecteurs) (scalaire)

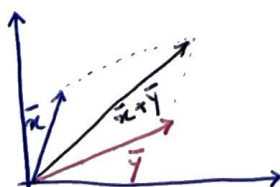
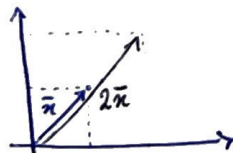
$$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

multiplication par un scalaire

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Somme de vecteurs

Graphiquement



(règle du parallélogramme)

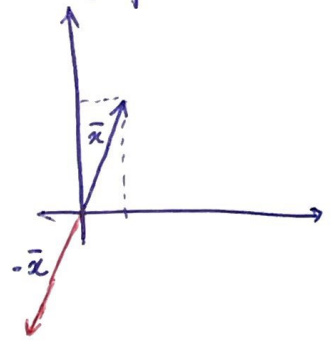
On rappelle aussi le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$

$$(\text{ou } \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

si on veut être très

et précis, pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, son vecteur opposé $-\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

Graphiquement



Prop. 2.1 | Pour $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (commutativité de la somme)
 - $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (associativité de la somme)
 - $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
 - $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
 - $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$ (associativité mixte)
- (distributivité)

(Preuve) Exercice !

Déf. 2.4 | On dit que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathbb{R}^n$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ ou $\vec{x} = \lambda\vec{y}$

Question | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ? Oui ! Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}$ et $\mathbf{0}$ sont colinéaires.

§ 2.3. Combinaisons linéaires et parties engendrées

Déf. 2.7 | É.d. $\mathcal{I} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, une combinaison linéaire (CL) de éléments de $\mathcal{I}$ est un vecteur de la forme

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. On appelle $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple 2.9 | On considère $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\bar{w}$ est-il une C.L. de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$?

Si oui, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 = \bar{w}$, i.e.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ (*) \quad -\alpha_2 = 3 \end{cases}$$

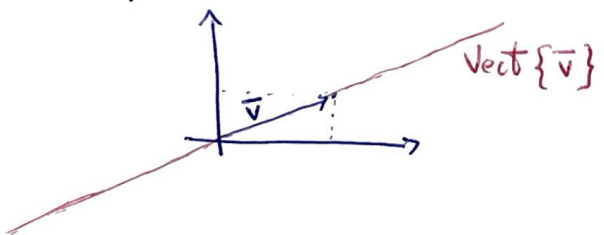
mais le SEL (*) est incompatible, car la 3ème éq. nous dit que $\alpha_2 = -3$, la 2ème donc que $\alpha_1 = 3/2$ mais $(-3) \cdot 3/2 + (-3) \neq 4$!

Déf 2.11 | E.d. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, la partie de $\mathbb{R}^n$ (ou sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$) engendrée par $\mathcal{F}$ est

$$\text{Vect } \mathcal{F} = \text{Vect } \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} = \left\{ \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

toutes les C.L. des vecteurs dans $\mathcal{F}$!

Exemple D | Pour $\bar{v} \neq 0$, $\text{Vect}\{\bar{v}\} =$ droite engendrée par $\bar{v} = \{\lambda \bar{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$



trop longs par contre...

§ 2.4. Familles libres et liées

Déf. 2.16 | Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite liée (ou linéairement dépendante) s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ [dont au moins un est non nul] tels que $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = 0$

Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est libre (ou linéairement indépendante) si elle n'est pas liée.

Question De quelle façon équivalente on peut dire que $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ est libre.

(i) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \mathbf{0}$. X

(ii) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \mathbf{0}$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. ✓

(iii) $0 \bar{v}_1 + \dots + 0 \bar{v}_k = \mathbf{0}$. X

(iv) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul, alors $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k \neq \mathbf{0}$. ✓

Question La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est-elle libre?

Non! Toute famille avec le vecteur nul est liée.

Exemple 2.18 Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Est-ce que $\mathcal{F}$ est libre?

On pose

$$(a) \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconques.}$$

$\mathcal{F}$ est libre ssi la seule possibilité est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Or, (a) équivaut à

$$(*) \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 14L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(*)' \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftarrow$$

ce qui nous dit que $\mathcal{F}$ est libre.

Thm 2.20 | Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée s'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\bar{v}_i$ est C.L. des vecteurs $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_n\}$. [10]

(Preuve) ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{F}$ est liée, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ pas tous nuls tels que

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \mathbf{0}$$

Il existe donc $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$:

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = (\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \bar{v}_{i-1}) + \overset{\neq 0}{\lambda_i \bar{v}_i} + (\lambda_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \bar{v}_n)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_i = -\frac{\lambda_1 \bar{v}_1}{\lambda_i} - \dots - \frac{\lambda_{i-1} \bar{v}_{i-1}}{\lambda_i} - \frac{\lambda_{i+1} \bar{v}_{i+1}}{\lambda_i} - \dots - \frac{\lambda_n \bar{v}_n}{\lambda_i} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$) Si $\bar{v}_i = \mu_1 \bar{v}_1 + \dots + \mu_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \mu_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \mu_n \bar{v}_n$ avec $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$

alors

$$\mu_1 \bar{v}_1 + \dots + \mu_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \bar{v}_i + \mu_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \mu_n \bar{v}_n = \mathbf{0}$$

i.e. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est liée. □

Déf (p. 27) | Exercice A

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_3}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_n} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Montrer que

• $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est libre + $\text{Vect } \mathcal{B}_{\text{can}} = \mathbb{R}^n$,

Chapitre 3 | Formes vectorielles des SEL

§ 3.1 + 3.2. Généralités

Déf. 3.1 Si: $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$, on notera $A := [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

Si: $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (coincident) on écrit $A \bar{x} := x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$
 produit d'une matrice $\uparrow$ cette CL et un vecteur $\in \mathbb{R}^m \text{ !}$

Lemme 3.2 | Pour une matrice A de taille $m \times n$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$A(\bar{x} + \lambda \bar{y}) = A\bar{x} + \lambda A\bar{y} \quad \leftarrow \text{linéarité}$$

(Preuve) On suppose $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Alors

$$A(\bar{x} + \lambda \bar{y}) = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} = (x_1 + \lambda y_1) \bar{a}_1 + \dots + (x_n + \lambda y_n) \bar{a}_n$$

$$= (x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n) + \lambda (y_1 \bar{a}_1 + \dots + y_n \bar{a}_n) = A\bar{x} + \lambda A\bar{y}. \quad \square$$

Point clé

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

SEL

$\equiv$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$\leftarrow$ Forme vectorielle du SEL

$\triangle$ On ne va pas donc faire des distinctions entre

$$SEL \equiv \text{Matrices augmentées} \equiv \text{Formes vectorielles des SEL}$$